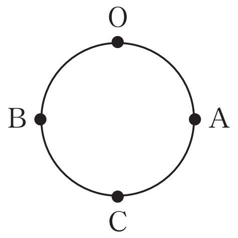
第3講　場合の数・確率

1　図のように円周上に4点O，A，B，Cがある．ある粒子はこの円周上を点Oを出発して，時計回りに確率 $\frac{2}{3}$ でとなりの点に，反時計回りに確率 $\frac{1}{3}$ でとなりの点に移動する．



(1)　この粒子が4回の移動までにA，B，Cすべての点を訪問する確率を求めよ．

(2)　この粒子が n 回の移動までにCを訪問しない確率を求めよ．

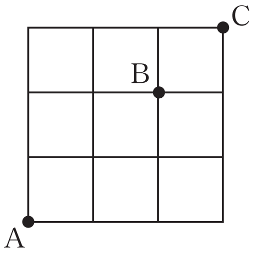
【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　右の図のような格子状の道路がある．左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むとする．1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない．ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない．また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる．



n を 8 以上の自然数とする．A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ．ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 「上の欄の項目に関係ある項目を下の欄から選び，これを線で結べ」という問題において，上欄には 3 個の項目 A，B，C があり，下欄には $n+3$ 個の項目がある．下欄の項目のうちには A，B，C に関係あるものがそれぞれ 1 つずつあり，他の n 個は A, B, C のどれにも関係のない項目である．いま，でたらめに下欄の項目から 3 個を選び，項目 A，B，C と結んだとき，次の問いに答えよ．ただし n は 0 以上の整数とする．

(1) 2 本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(2) 1 本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(3) 正しい解答の線にそれぞれ 2 点を与え，6 点満点とするとき，でたらめな解答者の得点の期待値を 1 点以下にしたい．n をいくら以上にすればよいか．

【Point Pickup】

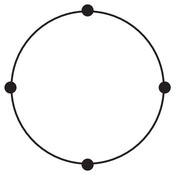
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　場合の数・確率

1　図のように円周上に４点 O，A，B，C がある．ある粒子はこの円周上を点 O を出発して，時計回りに確率 $\frac{2}{3}$ でとなりの点に，反時計回りに確率 $\frac{1}{3}$ でとなりの点に移動する．



(1)　この粒子が４回の移動までに A，B，C すべての点を訪問する確率を求めよ．

(2)　この粒子が n 回の移動までに C を訪問しない確率を求めよ．

時計回り，反時計回りに移動することをそれぞれ R，L と表す．

R，L が起こる確率がそれぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ である．

(1)　A，B，C のすべての点を訪問するには少なくとも３回の移動が必要である．

３回目で満たすのは 順に RRR または LLL のとき

４回目で満たすのは 順に RLLL または LRRR のとき

よって，求める確率は

$$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}+\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}=\mathbf{\frac{37}{81}}$$

(2)　C を訪問しないのは O を出発して

① RL　② LR のいずれかを繰り返すとき．

いずれも２回セットで，その確率は $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ である．

また，C には偶数回目にのみ訪問可能である．

(i)　n が偶数のとき

$n=2m$ とおくと，題意を満たすのは①または②を m 回繰り返すときで，

その確率は　$\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right)^m=\left(\frac{4}{9}\right)^m=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$

(ii)　n が奇数のとき

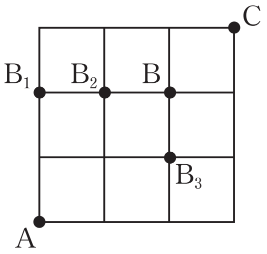
$n=2m+1$ とおくと，①または②を m 回繰り返せば O にいる．よってあとの１回は R，L 任意で題意を満たす．

その確率は　$\left(\frac{4}{9}\right)^m\times1=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{n-1}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

以上より，**n が偶数のとき** $\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　**n が奇数のとき** $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 右の図のような格子状の道路がある．左下のA地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むとする．1の目が出たら右に2区画，2の目が出たら右に1区画，3の目が出たら上に1区画進み，その他の場合はそのまま動かない．ただし，右端で1または2の目が出たとき，あるいは上端で3の目が出たときは，動かない．また，右端の1区画手前で1の目が出たときは，右端まで進んで止まる．



nを8以上の自然数とする．A地点から出発し，サイコロをn回振るとき，ちょうど6回目に，B地点以外の地点から進んでB地点に止まり，n回目までにC地点に到達する確率を求めよ．ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする．

1の目が出ることを ⇒ $\left(確率\frac{1}{6}\right)$　2の目が出ることを → $\left(確率\frac{1}{6}\right)$

3の目が出ることを ↑ $\left(確率\frac{1}{6}\right)$　4，5，6の目が出ることを × $\left(確率\frac{1}{2}\right)$ と表す．

Aを出発してBに止まるのは，右に2つ，上に2つ進むとき．

6回目でちょうどBに止まるのは，5回目終了時点で

(i) B_1にいて，6回目に⇒　(ii) B_2にいて，6回目に→　(iii) B_3にいて，6回目に↑

のいずれかのときである．

(i)のとき ↑，↑，×，×，×の順列を考えて，確率は $\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{144}\cdot\frac{1}{6}$

(ii)のとき ↑，↑，→，×，×の順列を考えて，確率は $\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{144}\cdot\frac{1}{6}$

(iii) のとき ⇒，↑，×，×，× または →，→，↑，×，×の順列を考えて，確率は

$$\left\{\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{10}{144}+\frac{5}{144}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{144}\cdot\frac{1}{6}$$

(i)～(iii)より，ちょうど6回目にBに止まる確率は $\left(\frac{5}{144}+\frac{5}{144}+\frac{15}{144}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{864}$

次に，Bを出発して$n-6$回振るまでにCに達するのは

事象P：⇒ または →が1回以上　事象Q：↑が1回以上 とすると，P∩Qのときである．

ここで

$\overline{P}$：すべて「↑ または ×」 $\overline{Q}$：すべて「⇒ または → または ×」 $\overline{P}\cap\overline{Q}$：すべて ×

であることより，$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$の確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$

ゆえに，求める確率は $\boldsymbol{\frac{25}{864}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 「上の欄の項目に関係ある項目を下の欄から選び，これを線で結べ」という問題において，上欄には3個の項目A，B，Cがあり，下欄には$n+3$個の項目がある．下欄の項目のうちにはA，B，Cに関係あるものがそれぞれ1つずつあり，他のn個はA，B, Cのどれにも関係のない項目である．いま，でたらめに下欄の項目から3個を選び，項目A，B，Cと結んだとき，次の問いに答えよ．ただしnは0以上の整数とする．

(1) 2本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(2) 1本の線のみが正しい解答になっている確率を求めよ．

(3) 正しい解答の線にそれぞれ2点を与え，6点満点とするとき，でたらめな解答者の得点の期待値を1点以下にしたい．nをいくら以上にすればよいか．

下の項目をa，b，c，d,……とし，A−a，B−b，C−cが正しい解答の対応であるとする．
下の項目のすべての選び方は　${}_{n+3}\mathrm{C}_3\cdot 3!=(n+3)(n+2)(n+1)$（通り）．これを$N$とする．

(1) 2本の線のみが正しい解答になっているのは

a，b，cから2個選んで，対応する上の項目と結ぶ．その後，下の項目の残りn個から1個選んで，残った上の項目と結ぶときである．それは　${}_3\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_1=3n$（通り）．

よって，求める確率は　$\dfrac{3n}{N}=\boldsymbol{\dfrac{3n}{(n+3)(n+2)(n+1)}}$

(2) 1本の線のみが正しい解答になっているのは以下のいずれか．

(i) a，b，cを3個とも選び，その内1個のみ対応する上の項目と結び，残り2個は対応しないものと結ぶとき．その方法は　${}_3\mathrm{C}_1=3$（通り）

(ii) a，b，cから2個選び，その内1個のみ対応する上の項目と結び，もう1個はしないものと結ぶ．その後，下の項目の残りn個から1個選んで，残った上の項目と結ぶとき．その方法は　${}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_1=6n$（通り）

(iii) a，b，cから1個選び，対応する上の項目と結ぶ．その後，残りn個から2個選んで，残った上の項目2個と結ぶとき．その方法は${}_3\mathrm{C}_1\times{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2!=3n(n-1)$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{3+6n+3n(n-1)}{N}=\boldsymbol{\dfrac{3(n^2+n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)}}$

(3) (1)の結果をP_2，(2)の結果をP_1とする．

また，3本とも正しい対応となっている確率P_3は　$P_3=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}$

よって，この試行による得点の期待値Eは　$E=6\cdot P_3+4\cdot P_2+2\cdot P_1$

$E\leqq 1$より　$6\cdot 1+4\cdot 3n+2\cdot 3(n^2+n+1)\leqq(n+3)(n+2)(n+1)$

$6(n+1)(n+2)\leqq(n+3)(n+2)(n+1)$

$n\geqq 0$より　$6\leqq n+3$　　よって，nを3以上にすればよい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　A, B の二人がそれぞれ 1 から 10 までの自然数の中から異なる 5 つの数を選ぶとき，2 人の選んだ数が 3 つ以上一致している確率を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　１から６の番号のつけられた６個の箱に，それぞれ３枚ずつの皿が重ねて置かれている．白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ１個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする．２つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない．２つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿１枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す．

(1)　サイコロを３回振るとき，皿が４枚の箱と２枚の箱がそれぞれ３個ずつとなる確率を求めよ．

(2)　サイコロを３回振るとき，皿が３枚の箱が２個，５枚の箱，４枚の箱，２枚の箱，１枚の箱がそれぞれ１個ずつとなる確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　A, B の２人がそれぞれ１から 10 までの自然数の中から異なる５つの数を選ぶとき，２人の選んだ数が３つ以上一致している確率を求めよ．

解答例

２人の数の選び方は

$$ {}_{10}C_5 \times {}_{10}C_5 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \times \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 2^4\cdot3^4\cdot7^2 \text{（通り）} $$

この内，２人の選んだ数が３つ以上一致するのは以下．

(i) ちょうど３つ一致するとき ← **起こりうる場合を「背反事象」に分ける**

一致する３つの数の選び方が ${}_{10}C_3$ 通り

残り７つの数の中から A が選ぶ残り２つの数の選び方が ${}_7C_2$ 通り，さらに残った５つの数の中から B が選ぶ残り２つの数の選び方が ${}_5C_2$ 通り．

よって，このときの場合の数は

$$ {}_{10}C_3 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{7\cdot6}{2\cdot1} \times \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7 \text{（通り）} $$

(ii) ちょうど４つ一致するとき

一致する４つの数の選び方が ${}_{10}C_4$ 通り

残り６つの数の中から A が選ぶ残り１つの数，およびさらに残った５つの数の中かから B が選ぶ残り１つの数の選び方が ${}_6C_1 \times {}_5C_1$（通り）．

よって，このときの場合の数は

$$ {}_{10}C_4 \times {}_6C_1 \times {}_5C_1 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} \times 6 \times 5 = 2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7 \text{（通り）} $$

(iii) ５つとも一致するとき

一致した５つの数の選び方がこのときの場合の数である．それは

$$ {}_{10}C_5 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 2^2\cdot3^2\cdot7 \text{（通り）} $$

以上より求める確率は

$$ \frac{2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7+2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7+2^2\cdot3^2\cdot7}{2^4\cdot3^4\cdot7^2} = \frac{2^2\cdot5^2+5^2+1}{2^2\cdot3^2\cdot7} = \frac{126}{2^2\cdot3^2\cdot7} = \mathbf{\frac{1}{2}} $$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1から6の番号のつけられた6個の箱に，それぞれ3枚ずつの皿が重ねて置かれている．白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ1個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする．2つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない．2つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿1枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す．

(1)　サイコロを3回振るとき，皿が4枚の箱と2枚の箱がそれぞれ3個ずつとなる確率を求めよ．

(2)　サイコロを3回振るとき，皿が3枚の箱が2個，5枚の箱，4枚の箱，2枚の箱，1枚の箱がそれぞれ1個ずつとなる確率を求めよ．

解答例

(1)　題意を満たすのは，白と黒のサイコロの出目3回分で1～6が1つずつ出た場合である．このうち，黒のサイコロ3回分の出目の選び方が ${}_6C_3=20$（通り），それがどの回で出たかの決め方が　$3!$ 通り，さらに残りの出目3つが白のサイコロのどの回で出たかの決め方が　$3!$ 通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{5\cdot4\cdot6\cdot6}{6^6}=\mathbf{\dfrac{5}{324}}$

(2)　皿は1回の試行につき1枚のみの移動となる．

3回の試行で5枚，4枚の入った箱が存在しているので，どの回も必ず皿の移入がこれらの2つの箱に起こり，移出はない．また，3回の試行で2枚，1枚入りの箱が存在しているので，どの回も必ず皿の移出がこれらの2つの箱に起こり、移入はない．

結果，3枚の箱2つはこの3回の試行で移出も移入も起こらなかった箱である．

皿が5枚，4枚，2枚，1枚になる箱の決め方が　${}_6C_4\times4!=6\cdot5\cdot4\cdot3$（通り）．

その箱をそれぞれ B_5，B_4，B_2，B_1 とし，簡単のためにその箱の番号を順に5，4，2，1とすると，B_5 に起こる2枚の移入が　(i)　B_1 から2枚　　(ii)　B_1，B_2 から1枚ずつ　起こる場合があり，B_4 に起こる1枚の移入は，(i)のときは B_2 から，(ii)のときは B_1 から起こる．

(i)の場合，3回分の出目は（黒，白）$=(1, 5)$，$(1, 5)$，$(2, 4)$ で，

これが3回のどこで出たかの決め方が　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）．

(ii)の場合，3回分の出目は（黒，白）$=(1, 5)$，$(1, 4)$，$(2, 5)$ で，

これが3回のどこで出たかの決め方が　$3!=6$（通り）．

B_5，B_4，B_2，B_1 である箱が実際にはどの番号であった場合も結果は同じである．

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot(3+6)}{6^6}=\mathbf{\dfrac{5}{72}}$

ややもすれば「計算式だけ」になりがちである．この解答を「見てもらう」という気持ちをもって時間とスペースの許す限り「論述」していくこと．書き方は自由であるが，適時「記号」や「図」を補助的に利用し読みやすくする工夫も必要であろう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。